L'equazione dell'iperbole

Si chiama iperbole il luogo dei punti del piano per i quali è costante la differenza delle distanze da due punti fissi detti fuochi.

La costruzione dell'iperbole è simile a quella dell'ellisse, ma il cerchio utilizzato contiene solo uno dei due fuochi.

Per quanto riguarda l'equazione, a partire dalla definizione $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = 2a$, se i fuochi si trovano sull'asse x in posizioni: $F_1(-c, 0)$, $F_2(c, 0)$, si ottiene l'equazione in forma canonica:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

con $c^2 = a^2 + b^2$, dove c è la

distanza dei fuochi dall'origine.

Cercando le intersezioni con gli assi cartesiani si ha:

per $y=0$, $x=\pm a$

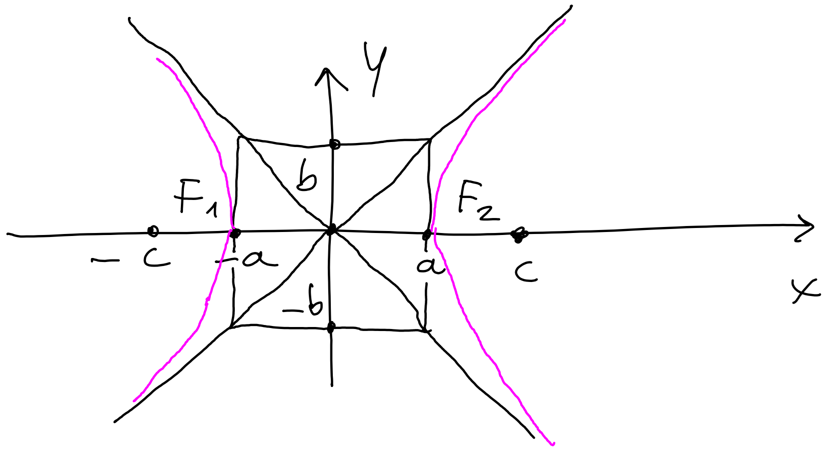
Non ci sono intersezioni con l'asse y e non esistono punti con $-a<x<a$, infatti:

$$y=\pm\sqrt{b^2\left(\frac{x^2}{a^2}-1\right)}=\pm\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$$

(il termine x^2-a^2 risulta negativo se $-a<x<a$).

Inoltre la funzione $y=\frac{b}{a}\sqrt{x^2-a^2}$ risulta crescente al crescere di x e per x molto grande, cioè per x tendente a infinito $(x\to\infty)$, la curva approssima le rette di equazioni $y=\pm\frac{b}{a}x$ (asintoti dell'iperbole).

In definitiva l'iperbole si può disegnare nel modo seguente:



L'iperbole risulta costituita da due rami separati e l'inclinazione degli asintoti dipende dai parametri a e b.

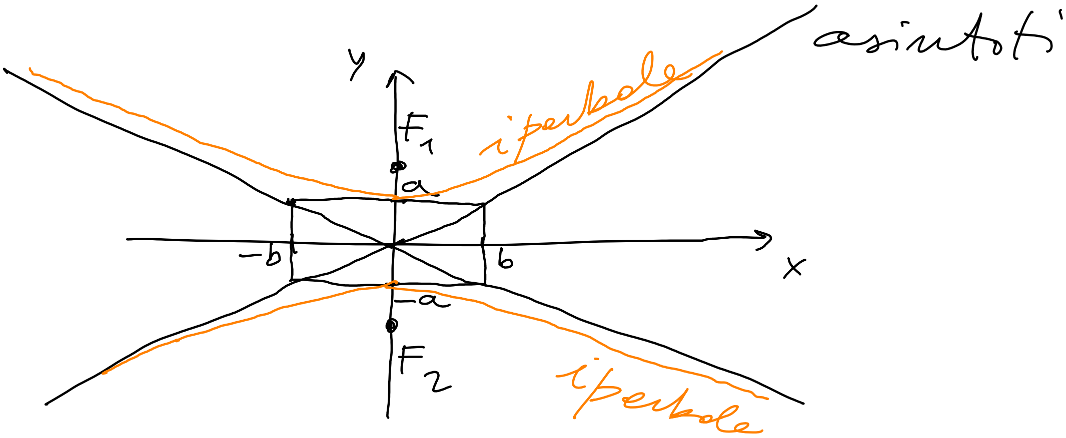
Se i fuochi sono sull'asse y l'equazione canonica diventa:

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1 \quad (\text{si scambiano } x \text{ e } y).$$

In questo caso gli asintoti hanno equazione

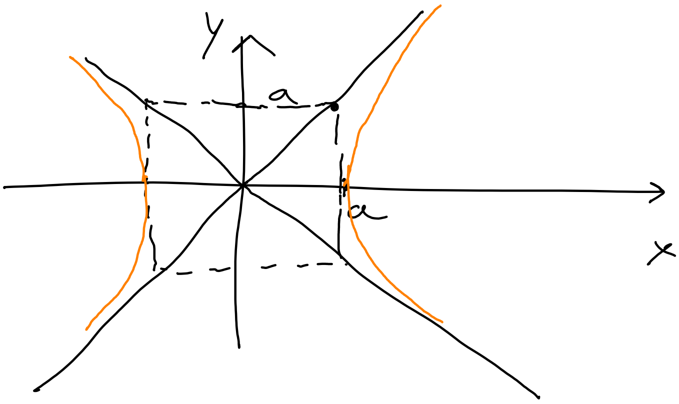
$$y = \pm \frac{a}{b} x$$

La distanza tra i vertici è sempre $2a$ e vale sempre la relazione $c^2 = a^2 + b^2$.



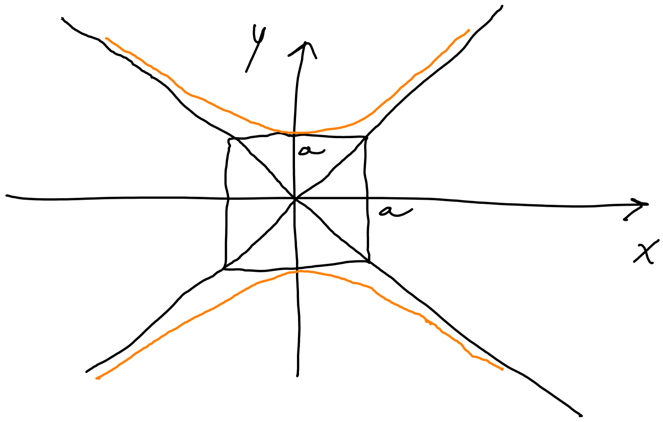
L' eccentricità dell' iperbole è sempre $e = \frac{c}{a}$, i valori di e risultano però maggiori di 1 ($e > 1$).

Quando $a = b$ gli asintoti risultano perpendicolari e l'iperbole si dice equilatera. Se i fuochi sono sull'asse x l'equazione diventa: $x^2 - y^2 = a^2$,

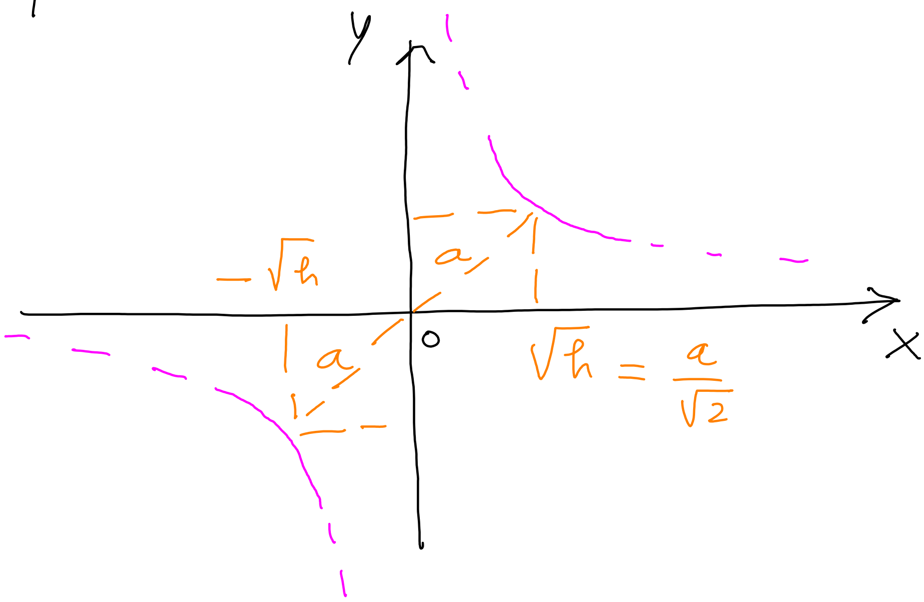


Se i fuochi sono sull'asse y

l'equazione diventa $y^2 - x^2 = a^2$,



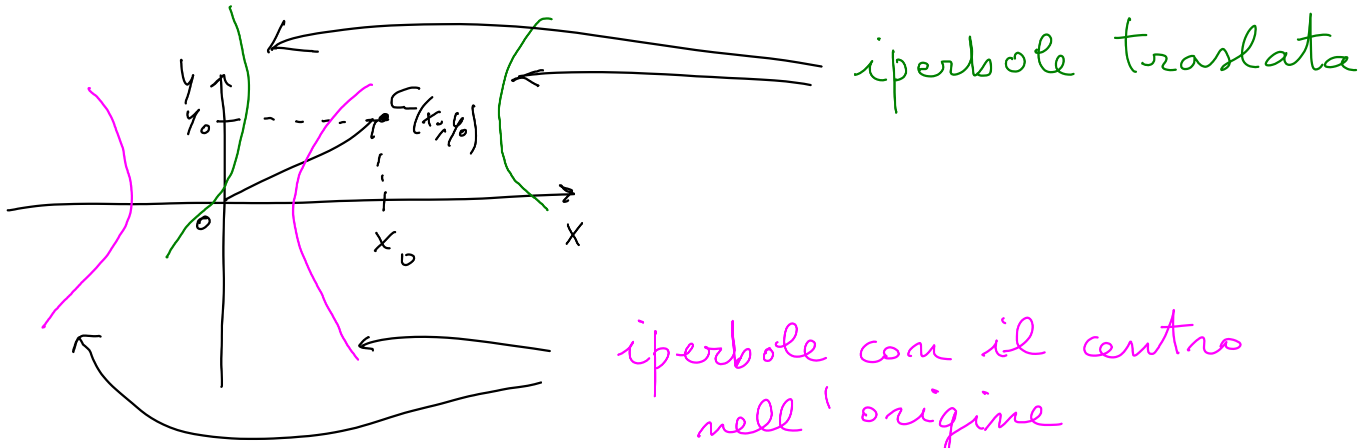
Ruotando di $45°$ un'iperbole equilatera gli asintoti coincidono con gli assi cartesiani e l'equazione diventa $xy = k$, dove $|k| = \frac{a^2}{2}$ e a è il semiasse maggiore dell'iperbole.



(Iperbole equilatera riferita ai propri asintoti)

L'iperbole traslata

L'equazione dell'iperbole con il centro in un punto qualsiasi si può ottenere con una traslazione:



Le equazioni della traslazione sono:

$$\begin{cases} x' = x + x_0 \\ y' = y + y_0 \end{cases}$$

, ricavando x, y e sostituendo

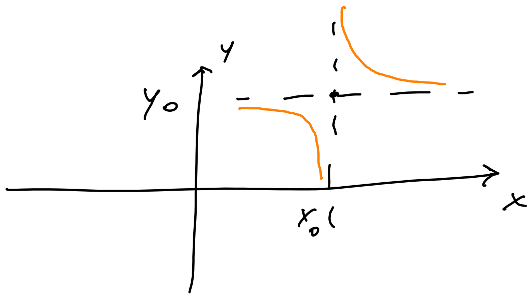
si ottiene:
$$\frac{(x-x_0)^2}{a^2} - \frac{(y-y_0)^2}{b^2} = 1$$

che è l'equazione di un'iperbole traslata con il centro in $C(x_0, y_0)$.

La funzione omografica

L'iperbole equilatera riferita ai

propri asintoti e traslata prende il nome di **funzione omografica**.



Partendo da $y = \frac{k}{x}$

l'equazione diventa $y - y_0 = \frac{k}{x - x_0}$

oppure $y = \frac{k}{x - x_0} + y_0$, $y = \frac{k + y_0 x - x_0 y_0}{x - x_0}$

In generale è il rapporto di due funzioni lineari: $y = \frac{ax + b}{cx + d}$

Per trovare gli asintoti si cercano: lo zero del denominatore (asintoto verticale: $x = -\frac{d}{c}$) e il limite per $x \to \infty$ della funzione (asintoto orizzontale):

$y = \frac{a}{c}$ (per x molto grande b e d sono trascurabili).

Per disegnare la curva si può calcolare inoltre un punto con $x \neq -\frac{d}{c}$.